

10. Klasse Gymnasium
Aufgabe aus der Mathematik
Bayern, LehrplanPLUS

- Arbeit sauber und ordentlich.
- Schreibe alle Rechenschritte auf. Deine Rechenwege sollen stets nachvollziehbar sein.
- Achte bei Rechenaufgaben auf die Verwechslung von $+$ und $-$.
- Der im Taschenrechner verwendete Taschenrechner darf verwendet werden. Die Taschenrechneraufgaben möglichst ohne Taschenrechner lösen. Bei welchen Aufgaben dies nicht möglich ist, ist in der Aufgabenstellung angegeben.
- Wird bei einer Aufgabe die Definitionsmenge angegeben, so ist diese anzunehmen, falls nichts anderes angegeben ist.
- Ist in der Aufgabenstellung nichts anderes angegeben, so sind die reellen Zahlen anzunehmen.

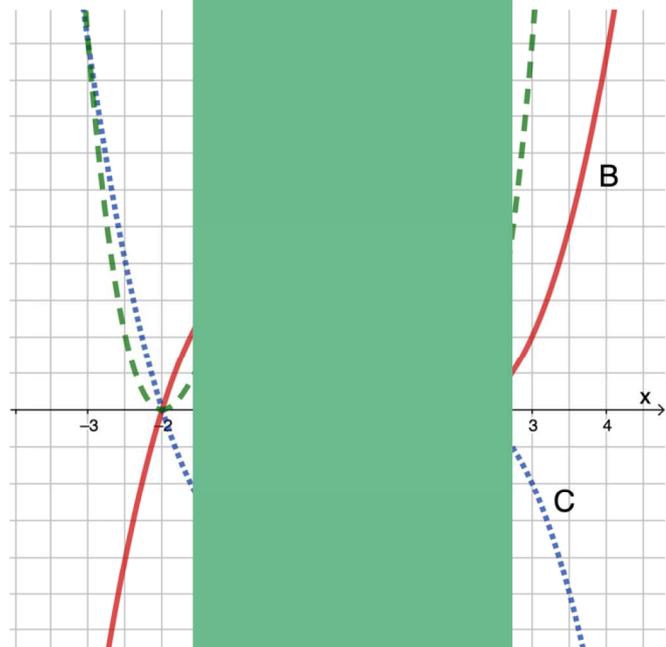
Aufgabe 1

Nullstellen – Nullstellen und Verläufe

(9 P)

Ordne die Gleichungen den Abbildungen A, B und C zu. Begründe jede Zuordnung. Nutze die Nullstellen und den Verlauf der Funktionen für begründete Aussagen.

Die Gleichungen $g(x) = -0,5x^2 + 2x - 2$, $h(x) = 0,2x^2 - 1,2x + 2$ und $i(x) = \frac{1}{5}x^2 - 1,2x + 2$ sind den Abbildungen A, B und C zugeordnet.



$g(x) = -0,5x^2 + 2x - 2$
 $h(x) = 0,2x^2 - 1,2x + 2$
 $i(x) = \frac{1}{5}x^2 - 1,2x + 2$

Aufgabe 2

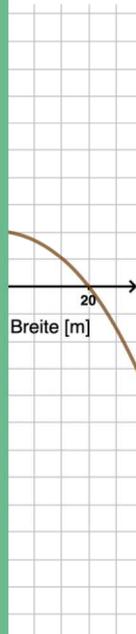
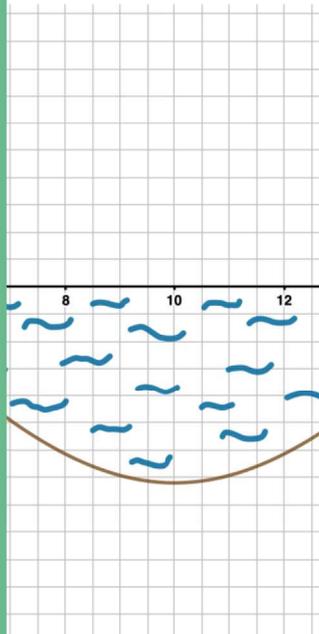
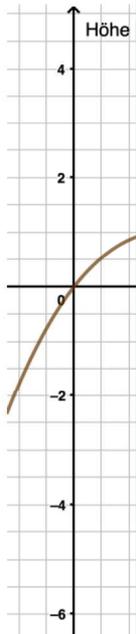
Kugeln und Zylinder (mit TR)

(5 P+5 P)

Der abgebildete Zylinder hat einen Durchmesser von 10 cm und eine Höhe von 12 cm. Er ist mit Wasser gefüllt. Die Wasseroberfläche ist ein kreisförmiges Becken mit einem Radius von 4 cm. Wie hoch ist das Wasser?

Die Abbildung zeigt ein Gelände der Seelöcher, das durch die Funktion $f(x)$ mit Grad 4 zeigt. Die x-Achse stellt die Entfernung in Metern dar, die y-Achse die Höhe in Metern. Das Gelände hat einen tiefsten Punkt bei $x = 2$ m und $y = 0$ m. Wie hoch ist das Gelände bei $x = 0$ m?

Die Abbildung zeigt ein Gelände der Seelöcher, das durch die Funktion $f(x)$ mit Grad 4 zeigt. Die x-Achse stellt die Entfernung in Metern dar, die y-Achse die Höhe in Metern. Das Gelände hat einen tiefsten Punkt bei $x = 2$ m und $y = 0$ m. Wie hoch ist das Gelände bei $x = 0$ m?



- a) Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Funktion.
- b) Der abgebildete Graph ist achsensymmetrisch. Zeichnen Sie eine allgemeine Parabel, die durch den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Funktion verläuft.

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = -0,04x^3 - 0,464x^2 + 1,28x$. Zeichnen Sie eine allgemeine Parabel, die durch den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Funktion verläuft.

Bestimmen Sie die Nullstellen und den Scheitelpunkt der Funktion $f(x) = -0,04x^3 - 0,464x^2 + 1,28x$. Zeichnen Sie eine allgemeine Parabel, die durch den Scheitelpunkt und die Nullstellen der Funktion verläuft.

In der Aufgabenstellung sind die Seile als Kurven dargestellt. Berechnen Sie die Länge der Seile.

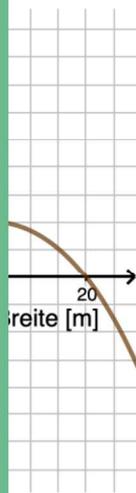
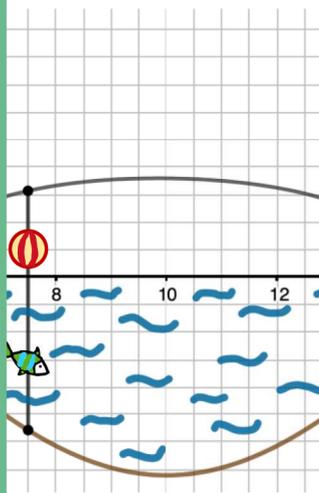
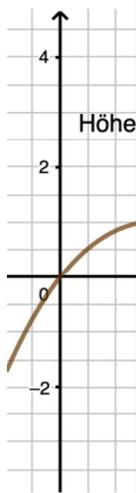
Berechnen Sie die Länge der Seile $f(x) = -0,04x^3 - 0,464x^2 + 1,28x$ und $g(x) = -0,001x^4 + 0,004x^3 - 0,004x^2 + 0,001x$.

Berechnen Sie die Länge der Seile $f(x) = -0,04x^3 - 0,464x^2 + 1,28x$ und $g(x) = -0,001x^4 + 0,004x^3 - 0,004x^2 + 0,001x$.

- c) Überprüfen Sie, ob die Seile die Bedingungen der Seilspannung erfüllen. Diese Bedingungen sind in der Aufgabenstellung beschrieben. (Die Seile sind als Kurven dargestellt.)

Überprüfen Sie, ob die Seile die Bedingungen der Seilspannung erfüllen. Diese Bedingungen sind in der Aufgabenstellung beschrieben. (Die Seile sind als Kurven dargestellt.)

Überprüfen Sie, ob die Seile die Bedingungen der Seilspannung erfüllen. Diese Bedingungen sind in der Aufgabenstellung beschrieben. (Die Seile sind als Kurven dargestellt.)



Aus sich
gespannt
2,75 m

nden können die Seile n
Abstand der Metallkonstr

s Beckens
zwischen

(i) Erm
spar

s der Zeichnung in welch

Seile ge-

(ii) Erlä
zu b

ichst genau, wie man vor
ng muss nicht durchgef

echnerisch

d) Die Wa
wendet
Zeichne
mithilfe

thilfe eines geraden Kegel
e beiden Geraden $g: y =$
und berechne anschlie

ierfür ver-
 $,75x - 12.$
ervolumen

Aufgabe 3

TR)

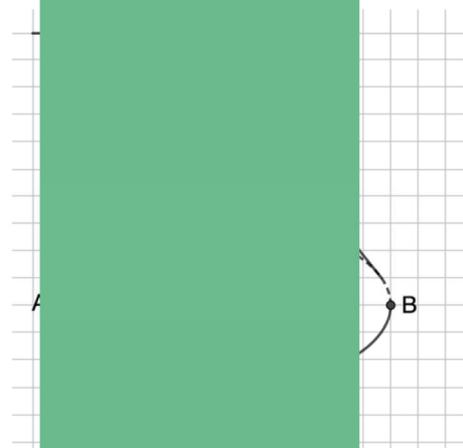
(6 P)

Gegeben
Kegels mit

äg bild eines geraden

Zeichne d
wendigen

notiere alle dafür not-



arbeitszeit: 45 Minut

33 Punkte)

10. Klasse Gymnasium
 Aufgabe aus der Mathematik
LÖSUNGEN

Aufgabe 1

Zuordnung ... im Funktionsterm von $h(x)$

Begründung

- Mithilfe

Faktori ... glich, erhält man:

$$\begin{aligned} h(x) &= \\ &= 0,2 \cdot \\ &= 0,2 \cdot (x + 2)^3 \quad \text{3. Binomische F} \\ &= 0,2 \cdot \end{aligned}$$

Die Fun ... nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 =$... haben Viel-
 fachheit ... Graph berührt an dieser ... die Funkti-
 onswer ... wechseln. Dies ist nur be

- Mithilfe

Der Sum ... agsmäßig große x -Werte ...
 ten für ... n vorkommenden Expon ... das Verhal-
 Expone ... erte. Da die Klammer, in ... ommende
 mand. ... d den Vorfaktor 0,2 hat, ... ante Sum-
 ponent ... „von links oben nach re ... nd der Ex-

Der Fun ... cht komplett ausmultipli ... erhalten zu
 bestimm

Man kö ... e Fragestellung es zulass ... Symmetrie
 argume ... fuktion muss achsensym

$$h(-x) = 0,2 \cdot (x^2 - 4)^2 = h(x)$$

Zuordnung ... im Funktionsterm von $i(x)$

Begründung

- Mithilfe

Der Fun ... ändig faktorisierte Form ... stellen ab-
 lesbar. ... it Vielfachheit 2, da der ... opelt vor-
 kommt ... hat Vielfachheit 1. Somit ... aph die x -
 Achse l ... bei $x_2 = -2$ schneiden.

Dies tri ... en B als auch auf den Gr

- Mithilfe des Graphen für tagsmäßig große x -Werte
Der Summanden mit den vorkommenden Exponenten
linearfaktoriell mit dem höchstem Exponenten
ergibt sich so, dass der Graph von „links oben“
auf der x -Achse, dies trifft

Zuordnung $f(x)$ zum Funktionsterm von $g(x)$

Begründung

- Mithilfe des Graphen für tagsmäßig große x -Werte
Argumentieren: $f(x) = -0,2 \cdot (x - 2)^2(x + 2)$
Argumen $f(x)$.
- Mithilfe des Graphen für tagsmäßig große x -Werte
Der Summanden mit den vorkommenden Exponenten
Linearfaktoriell mit höchstem Exponenten
sich so, dass der Graph von „links oben“
den Graphen $f(x)$ trifft auf

Man kann $f(x)$ argumentieren: Spiegelt man $f(x)$ an der x -Achse,
erhält man $i(x)$.

$$i(x) = -f(x) = -(-0,2 \cdot (x - 2)^2(x + 2)) = 0,2 \cdot (x - 2)^2(x + 2) =$$

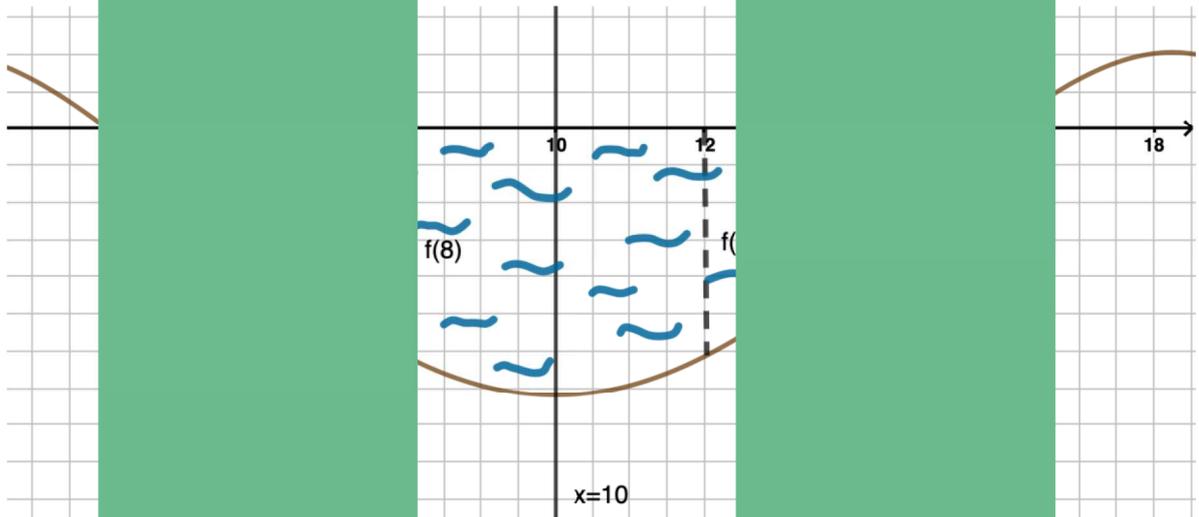
Somit haben $f(x)$ und $g(x)$ die gleichen Nullstellen. Vielfach-
heiten, $f(x)$ ist symmetrisch bzgl. der x -Achse.

Aufgabe 2

- a) Aufstellen $f(x)$ mithilfe der Nullstellen:
 $f(x) = (x - 2)^2(x + 20)$
Berechnen $f(2)$ an den Stellen des angegebenen Punktes:
 $f(2) = (2 - 2)^2(2 + 20) = 0$
 $f(20) = (20 - 2)^2(20 + 2) = 1,008$
 $f(-1008) = (-1008 - 2)^2(-1008 + 2) = -1,008$

$$\Rightarrow f(x) = (x - 16)(x - 20)$$

- b) Es gilt $f(8) = f(16)$; ...
 $f(8) = (8 - 16)(8 - 20) = f(16); \dots$

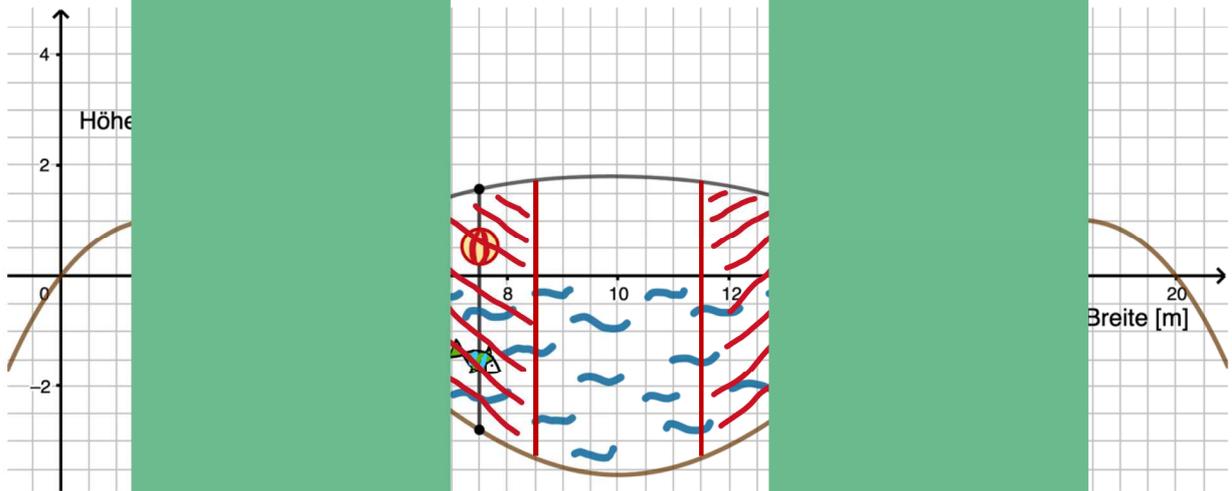


Die Gleichung der Symmetrieachse gilt immer für die x-Werte $x = 10$ um den Wert $x = 10$ herum. $f(10 + 4) = f(10 - 4)$; $f(10 + 6) = f(10 - 6)$.
Somit kann man allgemein sagen, dass $f(10 + x) = f(10 - x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.
gehört die Gerade $x = 10$ als Symmetrieachse zur Parabel.

Um allgemein die Symmetrieachse in Funktionsgraph ablesen zu können, ist $f(a + x) = f(a - x)$ für ein $x = a$ ($a \in \mathbb{R}$) zu zeigen.

c)

(i) Um die Breite des Beckens aus der Grafik näherungsweise abzulesen, muss man die Abstände zwischen den beiden Stellen, an denen die Höhe $h(x) = 5,5$ m liegt, ablesen.



Die Breite des Beckens liegt in den Intervallen $[6; 8,5]$ oder $[11,5; 12]$.

(ii) Der Beckenboden und Metallkanten sind durch die Funktion $h(x)$ beschrieben. Man berechnet $h(x) = \frac{1}{20}(x - 10)^2 - 2$.

- Da beide Polynome den Termglieder zu x^4 und x^3 haben, kann man bei der Subtraktion wegschreiben, sodass sich die x^4 und x^3 Terme aufheben.
- Anschließend kann man die Polynome $h(x)$ nacheinander mit den Werten $x = 2,75$ und $x = 6,39$ einsetzt, um jeweils die Gleichung (die Nullstelle) zu überprüfen. (die Hilfe einer Taschenrechner hilft, so dass auf einer Seite die Lösung $x = 6,39$ mit der \pm -Formel $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ übereinstimmt).
- Man kann die Nullstellen x_1 und x_2 von x , welche die Intervalle $h(x) > 0$ und $h(x) < 0$ gespannt werden.

Anmerkung: Die Funktion $h(x)$ ist nicht achsensymmetrisch, daher können die Nullstellen in verschiedenen Intervallen ergeben. Die Nullstellen x_1 und x_2 liegen rechts von $x = 0$, während die Nullstellen x_3 und x_4 links von $x = 0$ liegen.

Berechnung

$$\begin{aligned} h(x) &= (x^2 + 4,67x - 11,5) - (-0,001x^4 + 0,004x^3 + 1,28x^2 + 11,5) \\ &= (-0,001x^4 + 4,67x - 11,5) - (-0,001x^4 + 0,004x^3 + 1,28x^2 + 11,5) \\ &= -0,001x^4 + 4,67x - 11,5 + 0,001x^4 - 0,004x^3 - 1,28x^2 - 11,5 \\ &= -0,004x^3 - 1,28x^2 + 4,67x - 23,0 \end{aligned}$$

Die Nullstellen x_1 und x_2 der Funktion $h(x)$ müssen nicht unbedingt ganzzahlig liegen:

$$\begin{aligned} h(x) &= -0,004x^3 - 1,28x^2 + 4,67x - 23,0 \\ &= -0,004x^3 - 1,28x^2 + 4,67x - 23,0 \end{aligned}$$

Lösung

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-3,39 \pm \sqrt{1,8021}}{-0,34} \end{aligned}$$

$$x_1 \approx 6,39 \quad x_2 \approx 3,39 \dots$$

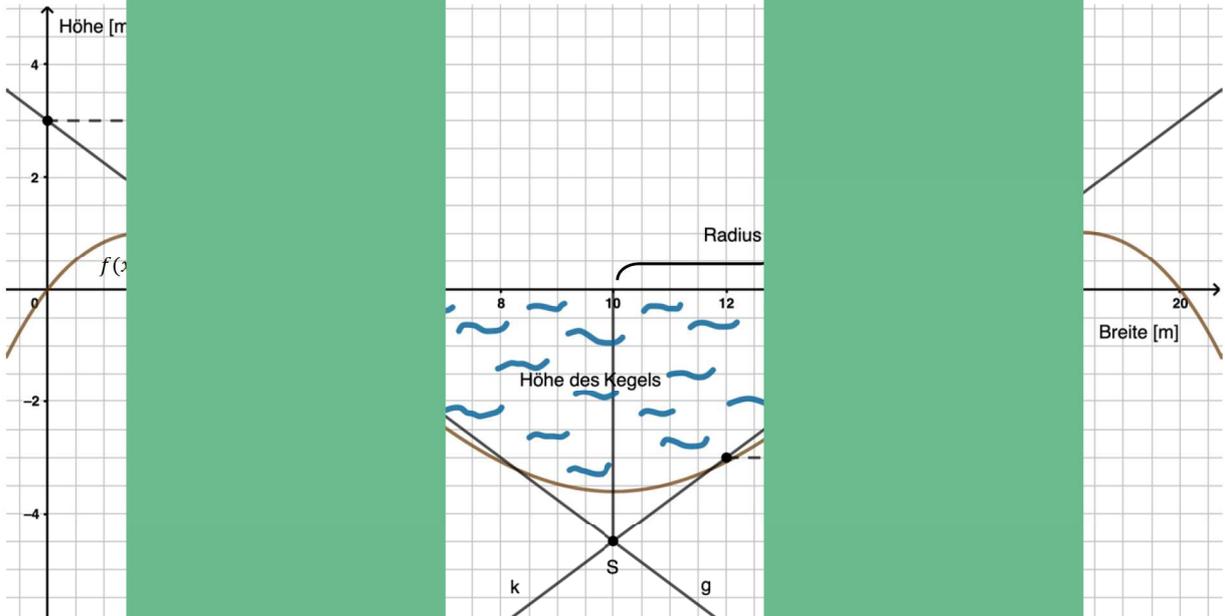
$$\begin{aligned} h(x) &= -0,004x^3 - 1,28x^2 + 4,67x - 23,0 \\ &= -0,004x^3 - 1,28x^2 + 4,67x - 23,0 \end{aligned}$$

$$x_{3/4} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3,39 \pm \sqrt{1,8021}}{-0,34}$$

$$x_3 \approx 8,39 \quad x_4 \approx 3,39 \dots$$

Bei den ... te muss der Sachzusamm ... erden. Der
 Wert x_1 ... nke Intervallgrenze angib ... ng auf z.B.
 eine Na ... n gerundet werden. An d ... gs die ur-
 sprung ... füllt, so dass man hier au ... achte Inter-
 vallgren ... r müsste man auch dann ... eite Nach-
 komma ... 5 wäre. Analog verfährt ... vall. Somit
 erhält m ... : $[6,1 \text{ m}; 8,4 \text{ m}]$ und $[11,5$

d)



Berechnung der Schnittpunkte S der Geraden:
 $-0,75x_1 = 0,75x_2 + 12$
 $15 = 1,5x_2$
 $\Rightarrow x_2 = 10$

Einsetzen in die Gleichung der beiden Geradengleichungen:
 $y = -0,75 \cdot 10 = -7,5$
 $y = -4,5$

Die Geraden schneiden sich im Punkt $(10 | -4,5)$, somit ist die Höhe des Kegels $4,5 \text{ m}$, d.h. die Höhe des Kegels ist $4,5 \text{ m}$.

Die Nullstellen der Parabel stimmen mit den Nullstellen der Geraden überein, d.h. bei $x_1 = 4$ und $x_2 = 12$ ist der Durchmesser der Grundfläche 16 m , somit ist demnach 6 m der Radius der Grundfläche des Kegels.

Für das Volumen des Kegels gilt:
 $V_{Kegel} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 4,5 \approx 169,65 \text{ m}^3$
 $169,65 \text{ m}^3 \approx 169 650 \text{ l}$

Aufgabe 3

Die Länge
Länge der
Zudem m

adius r der Grundfläche sind
dem Radius des Kreissek
el dieses Kreissektors be

esbar. Die
e darstellt.

Aus der Ze

$$m \text{ cm und } h = 4 \text{ cm}$$

Berechnu

$$h^2 = r^2 + h^2$$

$$\Rightarrow m = \sqrt{(\dots)^2 + (\dots)^2}$$

$$(\dots \text{ cm})^2 = 5 \text{ cm}$$

Berechnu

als α der Mantelfläche:

$$U = b$$

Der Umfa
länge b de

entspricht der Bogen-

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot \dots$$

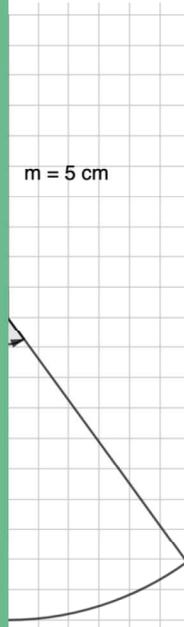
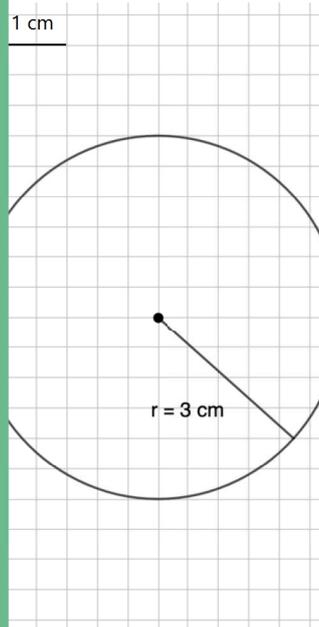
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$2 \cdot \pi \cdot r \cdot \dots$$

$$r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot r$$

$$\alpha = \frac{r \cdot 360^\circ}{m}$$

$$= 216^\circ$$



Möglicher

Punkte	3	13,5 bis 18	18,5 bis 22,5	23 bis 33
Note		4	3	1