

Bestimm
ursach
ermitt
nahm
nes N
dein V

durch ver-
aufgabe a)
er der An-
abbau ei-
Begründe

Aufgabe 3

n (mit TR)

P + 3 P)

Löse die j
rithmus al

ichungen. Gib die Lösun
t mit zwei Dezimalen an.

des Loga-

a) $3^x = 64$

$10 \cdot 7^{x+2} = 85$

Aufgabe 4

fallsexperimente (mit TR)

+ 2 P)

Aus einer
zwei Kuge

drei blauen und sechs ro
zogen.

heinander

a) Zeichne

tetes Baumdiagramm un

Ω an.

b) Bestim

gramms die Wahrscheinl

(i) zwei

zu ziehen.

(ii) min

c) Aus de

n die beiden Kugeln nun

n. Formu-

liere zu

$P = \left(\frac{1}{10}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10}$ das

arbeitszeit: 45 Minut

33 Punkte)

10. Klasse Gymnasium
 Aufgabe aus der Mathematik

LÖSUNGEN

Aufgabe 1

- a) Es handelt sich um eine Zunahme (positives Wachstum) mit $a = 1,15$, also $B(4) = 1000 \cdot 1,15^4 = 1500$, also 1500 mg.

Der Anfangswert $B(0) = 1000$ entspricht den anfänglichen 1000 mg. Der Parameter $a = 1,15$ entspricht der Zunahme um 15% pro Stunde. Der Parameter $d = 1$ entspricht dem festen Wert $d = 1$ Stunde. Der Parameter $t = 4$ entspricht dem festen Wert $t = 4$ Stunden. Der Restwert $B(4) = 1500$ entspricht dem Wert nach 4 Stunden.

- b) Es handelt sich um eine Abnahme (negatives Wachstum) mit $a = \frac{2}{3}$, also $B(t) = 1000 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$.

Der Anfangswert $B(0) = 1000$ entspricht dem anfänglichen Wert des Medikaments. Ein jährliches Wachstum von $\frac{1}{3}$ bedeutet, dass nach einem Jahr ein Drittel des Medikaments verbraucht wird, also eine Multiplikation mit dem Faktor $a = \frac{2}{3}$. Der Parameter $t = 1$ entspricht den verbliebenen Smarties nach 1 Jahr.

Anmerkung: Bei Zunahmen oder Abnahmen werden die Parameter a und d in der Funktionsformel $B(t) = B(0) \cdot a^t$ durch a und d ersetzt. Bei einer Abnahme $a < 1$ entspricht einem Werteverlust von $1 - a$ pro Zeiteinheit. Der Parameter $t = 1$ entspricht dem festen Wert für den Wachstumsfaktor $a = \frac{2}{3}$ und $d = 1$.

Aufgabe 2

- a) Allgemeines Exponentialgesetz $B(t) = B(0) \cdot a^t$ mit Anfangsbestand $B(0)$

$$B(2) = 40$$

$$a^2 = \frac{40}{100}$$

$$a = \sqrt{0,4}$$

$$\Rightarrow B(t) = 100 \cdot (\sqrt{0,4})^t$$

- b) Da man $t = 165$ in die Formel einsetzen muss, müsste man $t = 165$ in Stunden einsetzen.

$$t = \frac{165}{60}$$

$$B(2,75) = 100 \cdot (\sqrt{0,4})^{2,75} \approx 20,18 \text{ [mg]}$$

Dies ist die Menge des Medikaments im Blut nach 165 Minuten.

$$56 - 35 = 21$$

Nach 165 Minuten beträgt die Medikamentenmenge um ca. 20,18 mg.

c) Für die

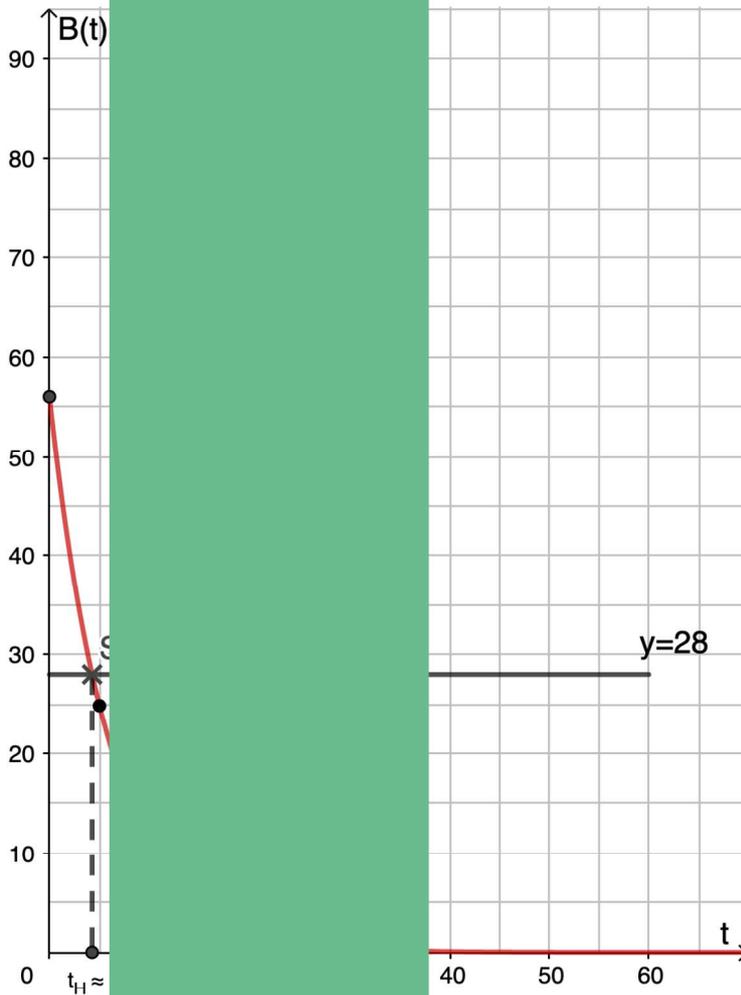
die Berechnung einiger Fu

:

z.B.: $B(5) = 56 \cdot 0,85^5 \approx 25$;
 $B(20) = 56 \cdot 0,85^{20} \approx 1$

$B(10) = 56 \cdot 0,85^{10} \approx 10$;
 $B(30) = 56 \cdot 0,85^{30} \approx 0,1$

$B(15) = 56 \cdot 0,85^{15} \approx 5$;



Halbwertzeit, bis nur noch die Hälfte des Anfangsbestandes vorhanden ist, man sucht $B(t_H) = \frac{56}{2} = 28$ gilt. Die Halbwertzeit $t_H \approx 4$ Stunden noch die Hälfte der Substanz vorhanden sind.

rt, bis nur noch die Hälfte des Anfangsbestandes vorhanden ist, man sucht $B(t_H) = \frac{56}{2} = 28$ gilt. Die Halbwertzeit $t_H \approx 4$ Stunden noch die Hälfte der Substanz vorhanden sind.

$B(0) = 56$, d.h. $t_H \approx 4$ der Substanzmenge,

Berechnung:
 $56 \cdot 0,85^t = 28$
 $0,85^t = \frac{28}{56} = 0,5$
 $t_H = \log_{0,85} 0,5$

d) Die Halbwertzeit dieser Substanz beträgt $t_H \approx 4$ Stunden, $0,85$ verbleibt nach t_H Stunden 56 bleibt

bei Rauchern ist um „bis zu“ t_H Stunden. Dies bedeutet, dass die Substanz $0,85$ schneller abgebaut wird. Die Halbwertzeit von $t_R = 2,14$ Stunden

all beträgt $t_H \approx 4$ Stunden, $0,85$ verbleibt nach t_H Stunden 56 bleibt

$$B(2,14)$$

$$a_R^{2,14} =$$

$$a_R = 2,14$$

Der Abnahmefaktor bei einem Raucher ist in $a_R = 2,14$ gegeben. 72.

Im allgemeinen Fall ist der Abnahmefaktor im Lungenkrebs a_R kleiner als bei einem Raucher, d.h. $a_R < 2,14$. Das führt zu einer geringeren Halbwertszeit $t_{1/2}$ und damit zu einer schnelleren Abnahme der Schadstoffkonzentration. Bei einem geringeren a_R ergibt sich ein kleinerer Wert für $t_{1/2}$, was zu einer geringeren Halbwertszeit führt. Exponential-

Bei einer Verdopplung des Anfangsbestandes des Krebsrisikos a_R ergibt sich ein Wert für $t_{1/2}$, der um ca. 15% abnimmt. 15% ab-

gebaut bis zu ca. 28%.

Aufgabe 3

a) $3^x = 6$ $x \approx 3,79$

b) $340 \cdot 7^{x+2} =$

$$7^{x+2} =$$

$$x + 2 =$$

$$2$$

$$x \approx -2$$

Alternativ können die Differentialgleichungen auch durch Trennung der Variablen der Seiten
mit der Methode der Trennung der Variablen 10 lösen:

a) $3^x = 6$

$$\lg(3^x) = \lg(6)$$

$$x \cdot \lg(3) = \lg(6)$$

$$x = \frac{\lg(6)}{\lg(3)}$$

$$x \approx 3,79$$

b) $340 \cdot 7^{x+2} = 10$

$$7^{x+2} = 0,2941$$

$$\lg(7^{x+2}) = \lg(0,2941)$$

$$(x+2) \cdot \lg(7) = \lg(0,2941)$$

$$x+2 = \frac{\lg(0,2941)}{\lg(7)}$$

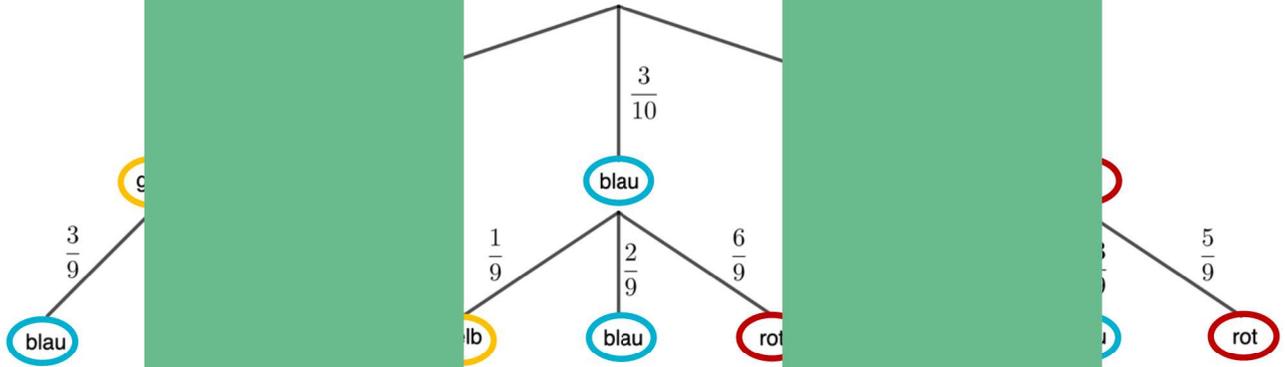
$$x = \frac{\lg(0,2941)}{\lg(7)} - 2$$

$$x \approx -2,71$$

Aufgabe 4

a) $\Omega = \{(g; g); (g; b); (g; r); (b; g); (b; b); (b; r); (r; g); (r; b); (r; r)\}$

bzw. kürzere Schreibweise $\{gg; gb; gr; br; rg; rb; rr\}$



b)

(i) $P(\text{„Zwei blaue Kugeln“}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3} \approx 33,33\%$

(ii) $P(\text{„Mindestens eine blaue Kugel“}) = P(gb) + P(bg) + P(bb) = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{6}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{30} + \frac{2}{30} + \frac{12}{15} = \frac{1}{15} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} \approx 53,33\%$

-

-

c) B : „Bei zwei Zurücklegen erhält man eine gelbe Kugel“

Im Baumdiagramm sind an den Ästen die Wahrscheinlichkeiten für die jeweilige Farbe in der Reihenfolge angegeben. Es gibt weiterhin die Möglichkeiten für die jeweiligen Farben, die man nun auch zweifach angeben kann.

mit der ... dass $\left(\frac{1}{10}\right)^2$ die Wahrsch ...
 eine ge ... chreibt. Die Wahrscheinl ...
 eine bl ... ägt $P(gb) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10}$, in un ... erhält man
 $P(bg) = \dots$ für das Ereignis $P(B) = \dots = \left(\frac{1}{10}\right)^2 +$
 $\frac{1}{10} \cdot \frac{3}{10} \dots$ $\frac{3}{10}$

Möglicher			
Punkte	3	13,5 bis 18	18,5 b ... 5 bis 33
Note		4	3 ... 1